BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2007

MATHÉMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré sera mis à la disposition des candidats

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties **1)** et **2)** portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1) Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue.

On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

P : Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur **R**, de dérivée f' donnée sur **R** par : $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Q : Soit u une fonction dérivable sur **R** et soit f la fonction définie sur **R** par $f = u^n$; alors f est dérivable sur **R**, de dérivée f' donnée par $f' = n\,u^{n-1}$.

2) On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;\,1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;\,0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a) Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;\,0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

b) Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

1) La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

a) On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan ***en annexe***, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées (2 ; 0). Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b) Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant \frac{23}{18}$.

d) Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2) a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}(1 - \frac{1}{10^n})$ c'est-à-dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}(1 - \frac{1}{10^n})$.

b) La suite v est définie par $v_n = 1,2777...7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.

En utilisant le **a)** démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3) La suite u définie au **1)** et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

a) Écrire Z sous forme algébrique .

b) Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.

c) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

d) Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z.
Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

e) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

(E) $y' + (1 + \tan x)\, y = \cos x$

(E_0) $y' + y = 1$.

1) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).

2) Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.

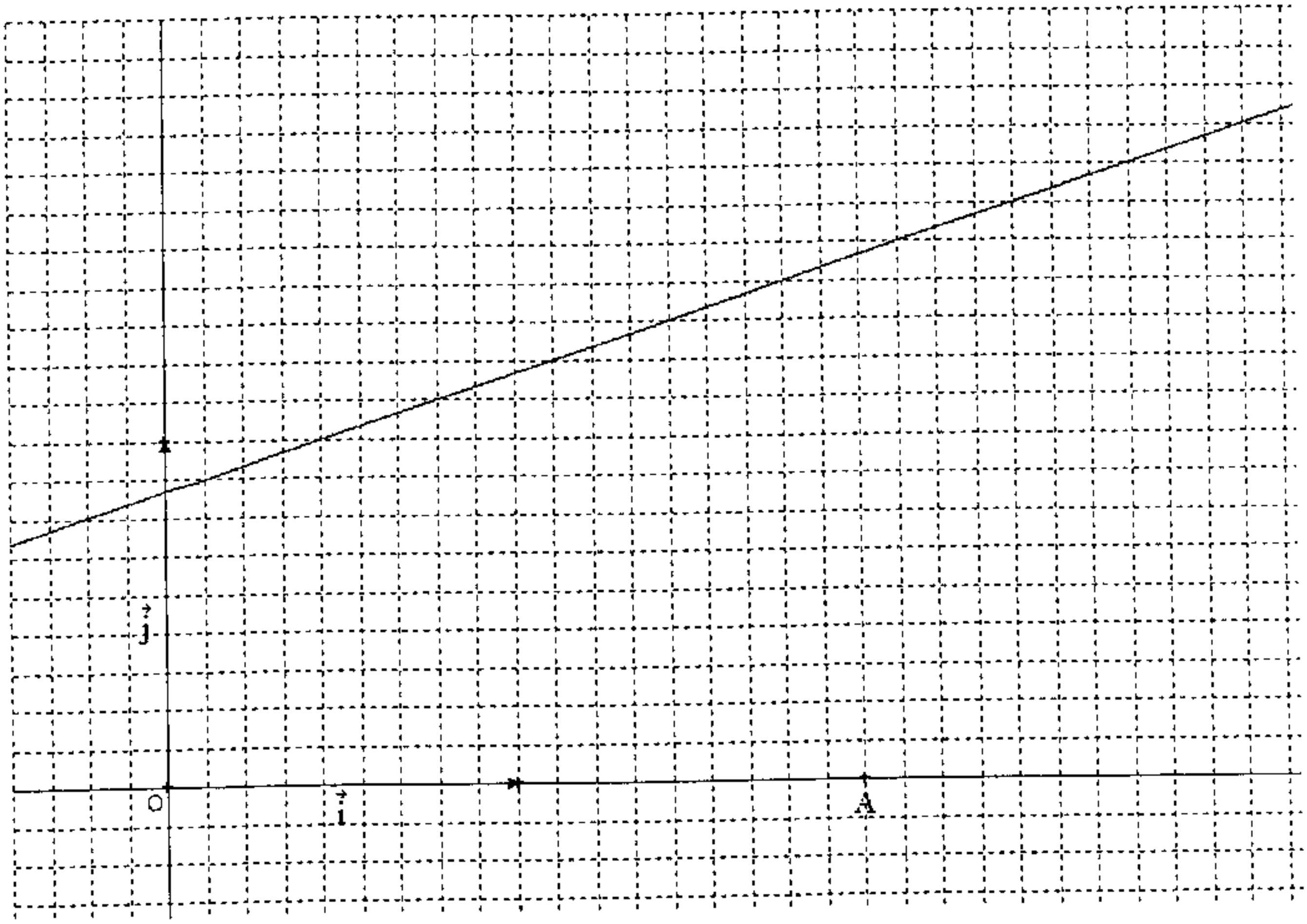
Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

ANNEXE

(À compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2007

MATHÉMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties **1)** et **2)** portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1) Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue.

On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

P : Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur **R**, de dérivée f' donnée sur **R** par : $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Q : Soit u une fonction dérivable sur **R** et soit f la fonction définie sur **R** par $f = u^n$; alors f est dérivable sur **R**, de dérivée f' donnée par $f' = n\,u^{n-1}$.

2) On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;\,1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;\,0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a) Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;\,0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

b) Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

1) La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\,u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

a) On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan ***en annexe 1***, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées (2 ; 0). Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b) Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant \frac{23}{18}$.

d) Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2) a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ c'est-à-dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

b) La suite v est définie par $v_n = 1{,}2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.

En utilisant le **a)** démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3) La suite u définie au **1)** et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

a) Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant ***en annexe 2*** l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1$ (modulo 7).

b) Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5$ (modulo 7) équivaut à $x \equiv 4$ (modulo 7).

c) Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0$ (modulo 7) sont les multiples de 7.

2) Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; \ldots ; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

b) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

c) Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0$ (modulo p) si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d) Application : $p = 31$.
Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1$ (modulo 31) et $3x \equiv 1$ (modulo 31).
À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbf{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0$ (modulo 31).

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

(E) $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$

(E_0) $y' + y = 1$.

1) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).

2) Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.

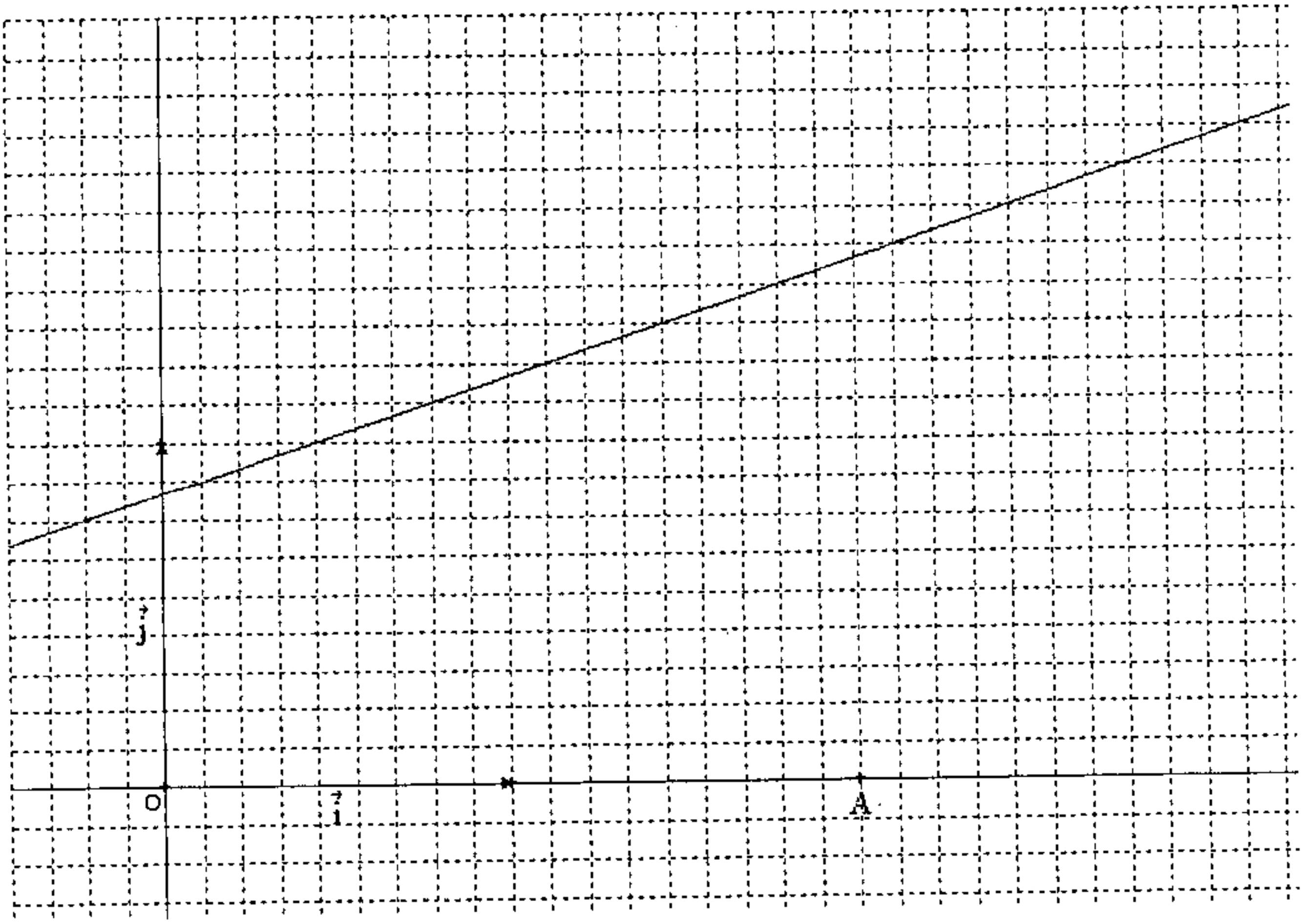
Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

ANNEXE 1

(À compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2



ANNEXE 2

(À compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3

a	1	2	3	4	5	6
y						6